9 ECUACIONES SIMULTÁNEAS

ÍNDICE PARTICULAR

CONCEPTO

Se dijo en la página 79 que se requieren tantas ecuaciones como incógnitas se tengan para que se pueda resolver la ecuación o el sistema de ecuaciones.

Si se tiene, por ejemplo, la ecuación $3x + 11y - 1 = 0$, como tiene dos incógnitas no se puede resolver porque solamente existe una ecuación. Que no se pueda resolver significa que existen un número infinito de soluciones en las que la incógnita x puede tomar, de hecho, todos los valores, solamente hay que ajustar el de la incógnita y para que restándole 1 dé igual a cero.

Si $x = 0$, basta ajustar a que $y = 1/11$ y la ecuación original resulta igual a cero.
Si $x = 1$, basta ajustar a que $y = - 2/11$ y la ecuación original resulta igual a cero.
Si $x = 2$, basta ajustar a que $y = - 5/11$ y la ecuación original resulta igual a cero, etc.

Se requiere entonces de otra ecuación para que queden bien definidos sus valores. En el caso anterior, si a la ecuación $3x + 11y - 1 = 0$ se le agrega la ecuación $2x - 5y - 13 = 0$, en las que debe entenderse que la incógnita x es la misma para ambas ecuaciones (tiene el mismo valor), lo mismo que la incógnita y . Para este caso, ya solamente la x puede valer $x = 4$ y la y nada más puede valer $y = - 1$, ya que al haber dos ecuaciones con dos incógnitas el sistema ya tiene solución.

Al hablar de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas debe entenderse entonces que se refiere a que existen dos ecuaciones "al mismo tiempo", o sea que la x y la y son las mismas para ambas. Por eso se llaman "simultáneas".

Para resolver sistemas así existen los siguientes métodos:

1) método gráfico;
2) método de suma y resta;
3) método de igualación;
4) método de sustitución, y
5) método de determinantes.

De todos ellos, el método gráfico no se estudiará en este curso por tratarse de un método bastante impreciso.

SUMA Y RESTA

Este método está basado en la propiedad de las igualdades: *"lo que se haga de un lado debe hacerse al otro lado para que la igualdad se conserve".* En primer lugar se multiplica una o las dos ecuaciones por aquella (s) cantidad(es) que al sumarse con la otra eliminen una de las dos incógnitas, no importa cuál.

Una vez obtenido el valor de la primera incógnita, se sustituye ésta en cualquiera de las dos originales y se despeja la segunda incógnita.

Ejemplo 1: $3x + 4y = -2$ (1)
$x - 2y = -4$ (2)

Solución: Si se multiplica toda la ecuación (2) por 2 (aplicando la propiedad de las igualdades), se obtiene $2x - 4y = -8$; es decir, el sistema se transforma en

$$3x + 4y = -2 \qquad (1)$$
$$2x - 4y = -8 \qquad (2a)$$

si se suman ambas se elimina la incógnita y, obteniéndose una sola ecuación con una sola incógnita, la cual ya se puede resolver de acuerdo con la primera ley de las ecuaciones (ver página 79):

$$\begin{array}{l} 3x + 4y = -2 \\ 2x - 4y = -8 \\ \hline 5x \qquad = -10 \end{array}$$

$$x = \frac{-10}{5}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Tómese en cuenta que al haber sumado ambas ecuaciones de esta manera, en realidad lo que se hizo fue, aplicando nuevamente la propiedad de las igualdades, sumar en ambos lados de la ecuación (1) la misma cantidad, ya que $2x - 4y$ es igual que -8 , según la ecuación (2a).

Una vez obtenido el valor de la primera incógnita, se sustituye ésta en cualquiera de las dos originales y se despeja la segunda incógnita. Haciéndolo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3(-2) + 4y &= -2 \\ -6 + 4y &= -2 \\ 4y &= -2 + 6 \\ 4y &= 4 \end{aligned}$$

$$y = \frac{4}{4}$$

$$\boxed{y = 1}$$

COMPROBACIÓN: Cuando se desea comprobar un sistema de ecuaciones simultáneas, debe hacerse sustituyendo los valores obtenidos para las incógnitas en las dos ecuaciones originales. Haciéndolo:

ecuación 1:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -2 \\ 3(-2) + 4(1) &= -2 \\ -6 + 4 &= -2 \text{ cierto.} \end{aligned}$$

ecuación 2:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -4 \\ -2 - 2(1) &= -4 \\ -2 - 2 &= -4 \text{ cierto.} \end{aligned}$$

Un error muy frecuente en el estudiante es que "comprueba" solamente en una de las dos ecuaciones, con lo cual ni comprueba nada así y en cambio sí se equivoca, pues supóngase que obtuvo los siguientes valores para las incógnitas: $x = -6$ e $y = 4$. Si esos valores los sustituye en la primera ecuación le resulta

ecuación 1:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -2 \\ 3(-6) + 4(4) &= -2 \\ -18 + 16 &= -2 \text{ cierto.} \end{aligned}$$

Cuando el estudiante solamente "comprueba" en esa primera ecuación, obtiene aparentemente algo cierto y se da por satisfecho; sin embargo, si se sustituyen esos valores en la segunda ecuación, se descubrirá que dichos valores son falsos. Efectivamente, sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene:

ecuación 2:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -4 \\ -6 - 2(4) &= -4 \\ -6 - 8 &= -4 \text{ ¡FALSO!} \end{aligned}$$

Conclusión: La comprobación debe hacerse en las dos ecuaciones.

Ejemplo 2: $4x + 3y = 17$ (1)
$3x + 2y = 11$ (2)

Solución: Si se multiplica toda la ecuación (1) por - 2 (aplicando la propiedad de las igualdades), se obtiene $-8x - 6y = -34$ y toda la ecuación (2) por 3 (aplicando la propiedad de las igualdades), se obtiene $9x + 6y = 33$; es decir, el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} -8x - 6y &= -34 \qquad (1a) \\ 9x + 6y &= 33 \qquad (2a) \end{aligned}$$

si se suman ambas se elimina la incógnita y, obteniéndose una sola ecuación con una sola incógnita, la cual ya se puede resolver de acuerdo con la primera ley de las ecuaciones (ver página 79):

$$\begin{array}{r} -8x - 6y = -34 \\ 9x + 6y = 33 \\ \hline x \qquad = -1 \end{array}$$

$$\boxed{x = -1}$$

Tómese en cuenta que al haber sumado ambas ecuaciones de esta manera, en realidad lo que se hizo fue, aplicando nuevamente la propiedad de las igualdades, sumar en ambos lados de la ecuación (1a) la misma cantidad, ya que $9x + 6$ es igual a 33, según la ecuación (2a).

Una vez obtenido el valor de la primera incógnita, se sustituye ésta en cualquiera de las dos originales y se despeja la segunda incógnita. Haciéndolo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 4(-1) + 3y &= 17 \\ -4 + 3y &= 17 \\ 3y &= 17 + 4 \\ 3y &= 21 \\ y &= \frac{21}{3} \\ \boxed{y = 7} \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN: Cuando se desea comprobar un sistema de ecuaciones simultáneas, debe hacerse sustituyendo los valores obtenidos para las incógnitas en las dos ecuaciones originales. Haciéndolo:

ecuación 1:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 17 \\ 4(-1) + 3(7) &= 17 \\ -4 + 21 &= -2 \quad \text{cierto.} \end{aligned}$$

ecuación 2:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 11 \\ 3(-1) + 2(7) &= 11 \\ -3 + 14 &= 11 \quad \text{cierto.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3: $9x + 2y = 17$ (1)
$9x + 2y = 11$ (2)

Solución: Si se multiplica toda la ecuación (1) por (- 1) (aplicando la propiedad de las igualdades), se obtiene $-9x - 2y = -17$; es decir, el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} -9x - 2y &= -17 \qquad (1a) \\ 9x + 2y &= 11 \qquad (2) \end{aligned}$$

si se suman ambas, se eliminan las dos incógnitas x e y , al mismo tiempo, no quedando ninguna incógnita. De hecho, queda que $0 = -6$, lo cual es falso. Esto se debe a que todas las ecuaciones simultáneas tienen solución, excepto dos casos especiales: el primero es cuando se trata de un sistema contradictorio o absurdo, como el del presente ejemplo. Es contradictorio porque si se observan ambas ecuaciones son idénticas en su lado izquierdo, por lo tanto no es posible que $9x + 2y$ valga 17 según la primera ecuación y luego valga 11 , según la segunda ecuación.

El segundo caso sin solución se tratará en el ejemplo 4.

Ejemplo 4: $9x + 3y = 18$ (1)
$3x + y = 6$ (2)

Solución: Si se multiplica toda la ecuación (2) por (- 3) (aplicando la propiedad de las igualdades), se obtiene $-9x - 3y = -18$; es decir, el sistema se transforma en

$$9x + 3y = 18 \qquad (1a)$$
$$-9x - 3y = -18 \qquad (2)$$

si se suman ambas, se eliminan las dos incógnitas x e y al mismo tiempo, no quedando ninguna incógnita. De hecho, queda que 0 = 0 , lo cual es cierto, pero eso no resuelve el problema. Esto se debe a que todas las ecuaciones simultáneas tienen solución, excepto dos casos especiales: el primero es cuando se trata de un sistema contradictorio o absurdo como se mencionó en el ejemplo 3. El segundo caso es cuando aparentemente se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, pero en realidad lo que se tiene es una sola ecuación con dos incógnitas, ya que una de ellas es simplemente múltiplo de la otra. Por lo tanto, por haber realmente una sola ecuación con dos incógnitas, conforme a la 2ª ley de las ecuaciones, página 79, no se puede resolver.

CALCULADORA

Para resolver ecuaciones simultáneas con dos incógnitas con la calculadora **Casio** *fx-95MS* deben seguirse los pasos que se describen a continuación, los cuales son muy semejantes a los seguidos para ecuaciones de segundo grado:

a) Ordenar ambas ecuaciones en la forma $\mathbf{a_1}x + \mathbf{b_1}y = \mathbf{c_1}$
$\mathbf{a_2}x + \mathbf{b_2}y = \mathbf{c_2}$

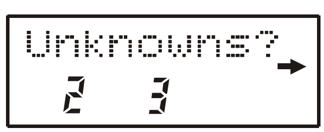
b) Borrar de las memorias de la calculadora todo registro anterior y ponerla en modo de cálculo, tecleando

SHIFT CLR 2 =

c) Para poner a la calculadora en modo ecuación, teclear

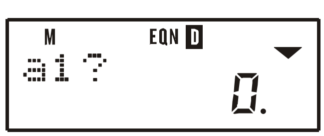
MODE MODE 1

Aparecerá entonces la pantalla



con la que la calculadora pregunta ¿cuántas incógnitas, dos o tres? . Teclear 2

d) Al aparecer la pantalla



la calculadora está preguntando por el valor del coeficiente $\mathbf{a_1}$. Teclearlo y para que dejarlo registrado en la memoria de la calculadora, oprimir $\boxed{=}$. Repetir el proceso con todos los demás coeficientes. Para ingresar un valor negativo debe hacerse con la tecla $\boxed{(-)}$.

Después de ingresar el valor del último coeficiente $\mathbf{c_1}$, aparece en la pantalla el valor de x. Oprimiendo la tecla $\boxed{=}$ despliega el valor de y.

EJERCICIO 24

Resolver las siguientes ecuaciones simultáneas por suma y resta o con la calculadora :

1)	$5x - 2y = 8$ $3x + y = -4$	2)	$2x - 9y = 16$ $x - 7y = 13$	3)	$4x - 5y = 0$ $2x + y = 14$
4)	$2x + y = 4$ $4x - y = -22$	5)	$2x + 15y = 76$ $3x + 5y = 9$	6)	$4x + 11y = -8$ $6x - 19y = -12$
7)	$x - 2y = 18$ $x - 3y = 22$	8)	$x + y = 0$ $4x - 3y = 63$	9)	$4x - 5y = 0$ $2x + 9y = 0$
10)	$3x + y = -6$ $7x - 5y = 30$	11)	$x + y = 8$ $x - y = 32$	12)	$10x - 15y = 0$ $7x + 5y = 155$
13)	$2x + 3y = 3$ $4x - 9y = -4$	14)	$7x - y = 1$ $8x + y = 2$	15)	$7x + 14y = 12$ $21x - 14y = 0$
16)	$5x + 8y = 6$ $2x - 4y = -3$	17)	$2x - 4y = -9$ $3x + 5y = 25$	18)	$6x + 3y = 15$ $x + 2y = 6$

IGUALACIÓN

Este método consiste en **igualar**, de allí su nombre, el valor de la incógnita x obtenido al despejarla de ambas ecuaciones, ya que se trata de la misma x; o bien, igualar el valor de la incógnita y obtenido al despejarla de ambas ecuaciones, ya que se trata de la misma y .

Al igualar estos valores se consigue tener una ecuación con una sola incógnita y por la 2ª ley de las ecuaciones, página 79, ya se puede resolver, simplemente despejando esa incógnita. Una vez obtenido el valor de la primera incógnita, se sustituye ésta en cualquiera de las dos originales y se despeja la segunda incógnita, aunque resulta más práctico hacer la sustitución en cualquiera de las dos despejadas.

Ejemplo 1:

$$3x + 4y = -2 \qquad (1)$$

$$x - 2y = -4 \qquad (2)$$

Solución: Despejando la x de la primera ecuación:

$$3x = -2 - 4y$$

$$x = \frac{-2-4y}{3} \qquad (3)$$

Despejando la x de la segunda ecuación:

$$x = -4 + 2y \qquad (4)$$

Obsérvese que los lados derechos de las nuevas ecuaciones (3) y (4) son iguales entre sí, ya que ambos son iguales a la misma x , por lo tanto se pueden igualar. Haciéndolo:

$$\frac{-2-4y}{3} = -4 + 2y$$

multiplicando por 3 toda la igualdad anterior, aplicando la propiedad de las igualdades "lo que se haga de un lado debe hacerse del otro también para que la igualdad se conserve", se obtiene:

$$-2 - 4y = 3(-4 + 2y)$$

$$-2 - 4y = -12 + 6y$$

$$-4y - 6y = -12 + 2$$

$$-10y = -10$$

$$y = \frac{-10}{-10}$$

$$\boxed{y = 1}$$

Este valor se puede sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales, aunque resulta más práctico hacerlo en la (3) o en la (4) , ya que en éstas ya está despejada la x; haciéndolo entonces en la (4) :

$$x = -4 + 2y \qquad (4)$$
$$x = -4 + 2(1)$$
$$x = -4 + 2$$
$$\boxed{x = -2}$$

Ejemplo 2: $4x + 3y = 17$ (1)
$3x + 2y = 11$ (2)

Solución: Despejando la y de la primera ecuación:

$$3y = 17 - 4x$$
$$y = \frac{17 - 4x}{3} \qquad (3)$$

Despejando la y de la segunda ecuación:

$$2y = 11 - 3x$$
$$y = \frac{11 - 3x}{2} \qquad (4)$$

Obsérvese que los lados derechos de las nuevas ecuaciones (3) y (4) son iguales entre sí, ya que ambos son iguales a la misma y , por lo tanto se pueden. Haciéndolo:

$$\frac{17 - 4x}{3} = \frac{11 - 3x}{2}$$

multiplicando por 3 y por 2 toda la igualdad anterior, aplicando la propiedad de las igualdades "lo que se haga de un lado debe hacerse del otro también para que la igualdad se conserve", se obtiene:

$$2(17 - 4x) = 3(11 - 3x)$$
$$34 - 8x = 33 - 9x$$
$$-8x + 9x = 33 - 34$$

$$\boxed{x = -1}$$

Este valor se puede sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales, aunque resulta más práctico hacerlo en la (3) o en la (4) , ya que en éstas ya está despejada la x; haciéndolo entonces en la (4):

$$y = \frac{11 - 3x}{2} \qquad (4)$$

$$y = \frac{11 - 3(-1)}{2} = \frac{11 + 3}{2}$$

$$y = \frac{14}{2}$$

$$\boxed{y = 7}$$

EJERCICIO 25

Resolver las siguientes ecuaciones simultáneas por igualación o con la calculadora:

1) $x + 3y = 11$ $5x - y = -9$	2) $6x + 4y = 6$ $5x - 2y = 3$	3) $2x + y = 11$ $8x - y = -6$
4) $4x - 3y = 5$ $8x + y = -4$	5) $5x - 2y = 5$ $10x + 9y = 2$	6) $4x - 3y = 7$ $4x + 3y = -1$
7) $x - y = 5$ $2x + y = 1$	8) $x = y$ $5x + y = -18$	9) $3x - 7y = 0$ $8x + 9y = 0$
10) $7x + 2y = 4$ $7x - 2y = 2$	11) $9x - 2y = -2$ $18x + 4y = 24$	12) $14x - 5y = 0$ $7x + y = 7$
13) $8x + y = -2$ $11x + y = 1$	14) $x + 2y = 2$ $2x - y = 2$	15) $x - y = 1$ $2x + 6y = 8$

SUSTITUCIÓN

Este método consiste en **sustituir** en una cualquiera de las dos ecuaciones, de allí su nombre, el valor de la incógnita x obtenido al despejarla de la otra ecuación, con lo que se logra obtener una sola ecuación con una sola incógnita, la cual ya se puede resolver conforme a la 2ª ley de las ecuaciones simplemente despejando esa incógnita. O bien, haciendo el mismo proceso, pero con la y .

Una vez obtenido el valor de la primera incógnita, se sustituye ésta en cualquiera de las dos originales y se despeja la segunda incógnita, aunque resulta más práctico hacer esta sustitución en la incógnita despejada.

Ejemplo 1: $3x + 4y = -2$ (1)

$x - 2y = -4$ (2)

Solución: Despejando la x de la primera ecuación:

$$3x = -2 - 4y$$

$$x = \frac{-2-4y}{3} \qquad (3)$$

sustituyendo este valor obtenido para x en la otra ecuación, es decir en (2):

$$\frac{-2-4y}{3} - 2y = -4$$

Hay que multiplicar toda la igualdad por el denominador 3 para que éste se elimine. Obsérvese que "no pasa" a multiplicar al otro lado:

$$3\left(\frac{-2-4y}{3} - 2y\right) = 3(-4)$$

$$\cancel{3}\left(\frac{-2-4y}{\cancel{3}}\right) - 3(2y) = 3(-4)$$

$$-2 - 4y - 6y = -12$$

$$-4y - 6y = -12 + 2$$

$$-10y = -10$$

$$y = \frac{-10}{-10}$$

$$\boxed{y = 1}$$

Este valor se puede sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales, pero resulta más práctico hacerlo en la (3), ya que allí ya está despejada la *x*. Haciéndolo:

$$x = \frac{-2-4y}{3} \qquad (3)$$

$$x = \frac{-2-4(1)}{3} = \frac{-2-4}{3}$$

$$x = \frac{-6}{3}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Ejemplo 2: $4x + 3y = 17$ (1)
$3x + 2y = 11$ (2)

Solución: Despejando la *x* de la primera ecuación:

$$4x = 17 - 3y$$

$$x = \frac{17-3y}{4} \qquad (3)$$

sustituyendo este valor obtenido para *x* en la otra ecuación, es decir en (2):

$$3\left(\frac{17-3y}{4}\right) + 2y = 11$$

$$\frac{3(17-3y)}{4} + 2y = 11$$

$$\frac{51-9y}{4} + 2y = 11$$

Hay que multiplicar toda la igualdad por el denominador 4 para que éste se elimine. Obsérvese que "no pasa" a multiplicar al otro lado:

$$\cancel{4}\left(\frac{51-9y}{\cancel{4}}\right) + 4(2y) = 4(11)$$

$$51 - 9y + 8y = 44$$

$$-9y + 8y = 44 - 51$$

$$-y = -7$$

$$\boxed{y = 7}$$

Este valor se puede sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales, pero resulta más práctico hacerlo en la (3), ya que allí ya está despejada la x. Haciéndolo:

$$x = \frac{17 - 3y}{4} \qquad (3)$$

$$x = \frac{17 - 3(7)}{4} = \frac{17 - 21}{4}$$

$$x = \frac{-4}{4}$$

$$\boxed{x = -1}$$

EJERCICIO 26

Resolver las siguientes ecuaciones simultáneas por sustitución o con la calculadora :

1) $5x - 2y = 8$
$3x + y = -4$

2) $6x + 4y = 6$
$5x - 2y = 3$

3) $4x - 5y = 0$
$2x + y = 14$

4) $4x - 3y = 5$
$8x + y = -4$

5) $2x + 15y = 76$
$3x + 5y = 9$

6) $4x - 3y = 7$
$4x + 3y = -1$

7) $x - 2y = 18$
$x - 3y = 22$

8) $x = y$
$5x + y = -18$

9) $4x - 5y = 0$
$2x + 9y = 0$

10) $7x + 2y = 4$
$7x - 2y = 2$

11) $x + y = 8$
$x - y = 32$

12) $14x - 5y = 0$
$7x + y = 7$

13) $2x + 3y = 3$
$4x - 9y = -4$

14) $x + 2y = 2$
$2x - y = 2$

15) $7x + 14y = 12$
$21x - 14y = 0$

16) $4x + 3y = 21$
$3x - 8y = 32$

17) $2x + 9y = 33$
$2x - 13y = 28$

18) $7x + 5y = 22$
$5x - 21y = 17$

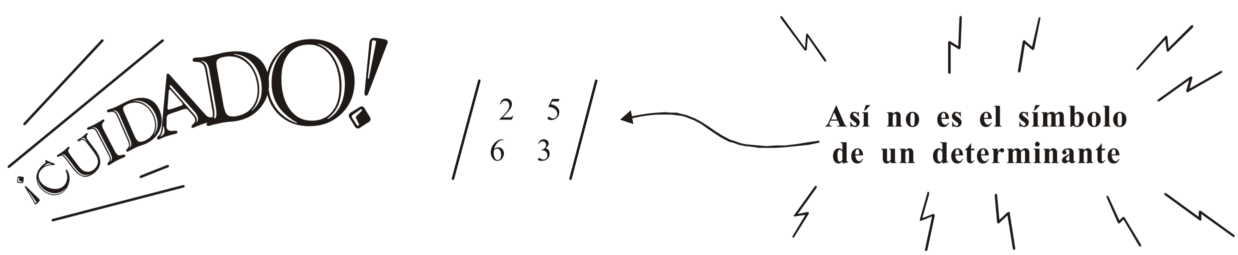
DETERMINANTES

Un determinante es una ordenación de números o cantidades, dispuestos en igual número de filas que de columnas. Su símbolo son dos líneas verticales abarcando a esas cantidades. Ejemplos de determinantes son los siguientes, en donde debe entenderse que el determinante es solamente la parte comprendida entre las barras, sin incluir las aclaraciones que se agregan relacionadas con las filas y las columnas:

$$\begin{array}{cc} \text{2 filas} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ & \uparrow \ \uparrow \\ & \text{2 columnas} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \text{3 filas} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ & \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \\ & \text{3 columnas} \end{array}$$

Un determinante es de segundo orden si tiene dos filas y dos columnas; es de tercer orden si tiene tres filas y tres columnas; es de cuarto orden si tiene cuatro filas y cuatro columnas, etc., es decir, el orden de un determinante está dado por el número de filas (o columnas, puesto que tienen el mismo número de ambas) que contenga.

Una escritura malhecha muy frecuente en el estudiante es poner las líneas con que se simboliza un determinante, en vez de verticales, oblicuas, y eso ya no es el símbolo de un determinante, de la siguiente manera:



Todo determinante tiene un valor numérico. Para obtener dicho valor, tratándose de determinantes de segundo orden, se multiplican en cruz, en un sentido positivo y en el otro negativo, de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \overset{+}{\searrow}\, ad \qquad bc \,\overset{-}{\swarrow} \quad = ad - bc$$

Hay que recordar que el hecho de que en este sentido ↘ se considere positivo significa que se conserva el signo que algebraicamente le corresponda, y que en este sentido ↙ se considere negativo significa que cambia de signo, no que necesariamente acabará poniéndose el signo −. La regla para obtener el valor numérico de determinantes de 3^er orden se verá más adelante.

Ejemplo 1 Hallar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

Solución: La diagonal positiva incluye al 2 y al 3; la diagonal negativa (la que cambia de signo) incluye al 5 y al 6. De manera que

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 5 \times 6 = 6 - 30 = \boxed{-24}$$

Ejemplo 2 Hallar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$

Solución: La diagonal positiva incluye al 3 y al 8; la diagonal negativa (la que cambia de signo) incluye al -5 y al 1. Obsérvese que en este caso la diagonal negativa resultó positiva por el hecho de cambiar se signo. De manera que

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - (-5)(1) = 24 + 5 = \boxed{29}$$

Ejemplo 3 Hallar el valor del determinante $\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución: La diagonal positiva incluye al - 4 y al 2; la diagonal negativa (la que cambia de signo) incluye al -9 y al - 1. De manera que

$$\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4)(2) - (-9)(-1) = -8 - 9 = \boxed{-17}$$

EJERCICIO 27

Hallar el valor de los siguientes determinantes:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 15 & -10 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 13 & -8 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 2a & -3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 5 & ab \\ -2 & -3ab \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 2a & -a \\ 6b & -5b \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 3ab & 2a \\ -b & -4 \end{vmatrix}$ 11) $\begin{vmatrix} ab & ab \\ -10 & 12 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 3c & abc \\ -9 & 2ab \end{vmatrix}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas por determinantes, o utilizando determinantes, se tiene la siguiente regla, siempre y cuando ambas ecuaciones estén ordenadas de la forma

$$ax + by = c \qquad (1)$$
$$dx + ey = f \qquad (2)$$

en donde *a, b, c, d, e* y *f* representan números. Que estén ordenadas las ecuaciones significa que por columnas deben estar las mismas incógnitas y después del signo "igual" deben estar en columna todos los términos independientes, es decir, los números "solitos" o los que no tienen incógnita.

Para calcular el valor de una incógnita cualquiera:

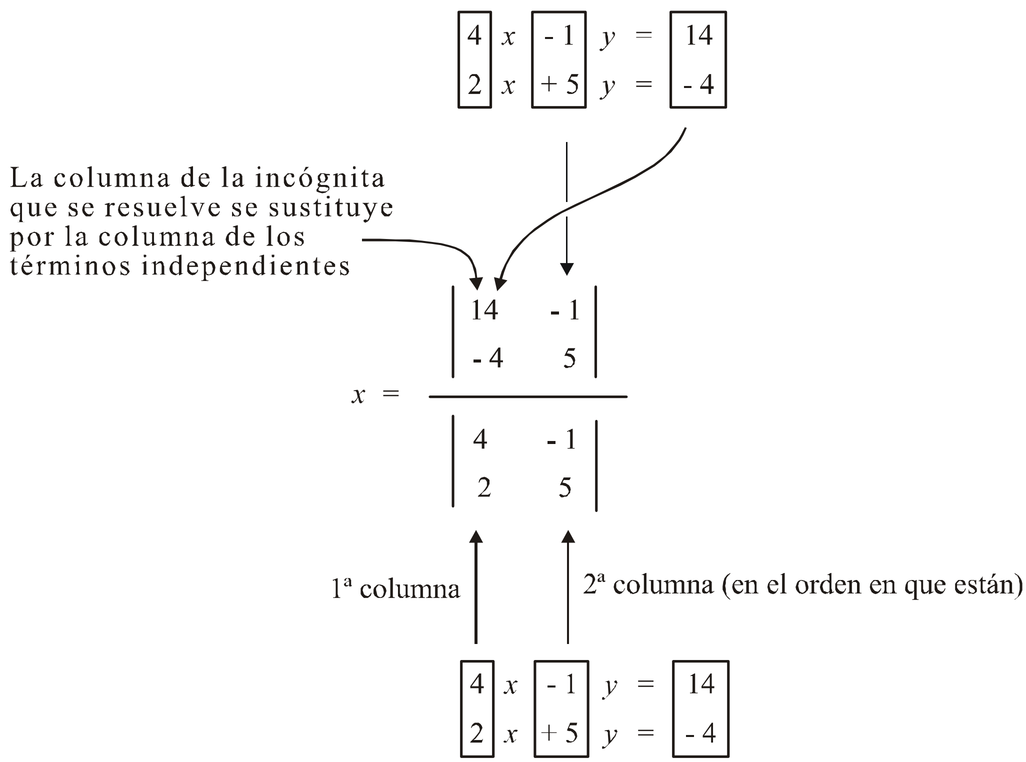
* ***El denominador es el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas en el orden en que están.***

* ***El numerador es el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas en el orden en que están, en el que se sustituye la columna de los coeficientes de la incógnita que se resuelve por la columna de los términos independientes.***

Ejemplo 1: $4x - y = 14$
$2x + 5y = -4$

Solución: Las dos ecuaciones están ordenadas, es decir que la primera columna es la de las x (4 y 2), la segunda columna es la de las y (- 1 y 5) y la tercer columna es la de los términos independientes (14 y - 4).

Para obtener el valor de la incógnita x, conforme a la regla anterior,



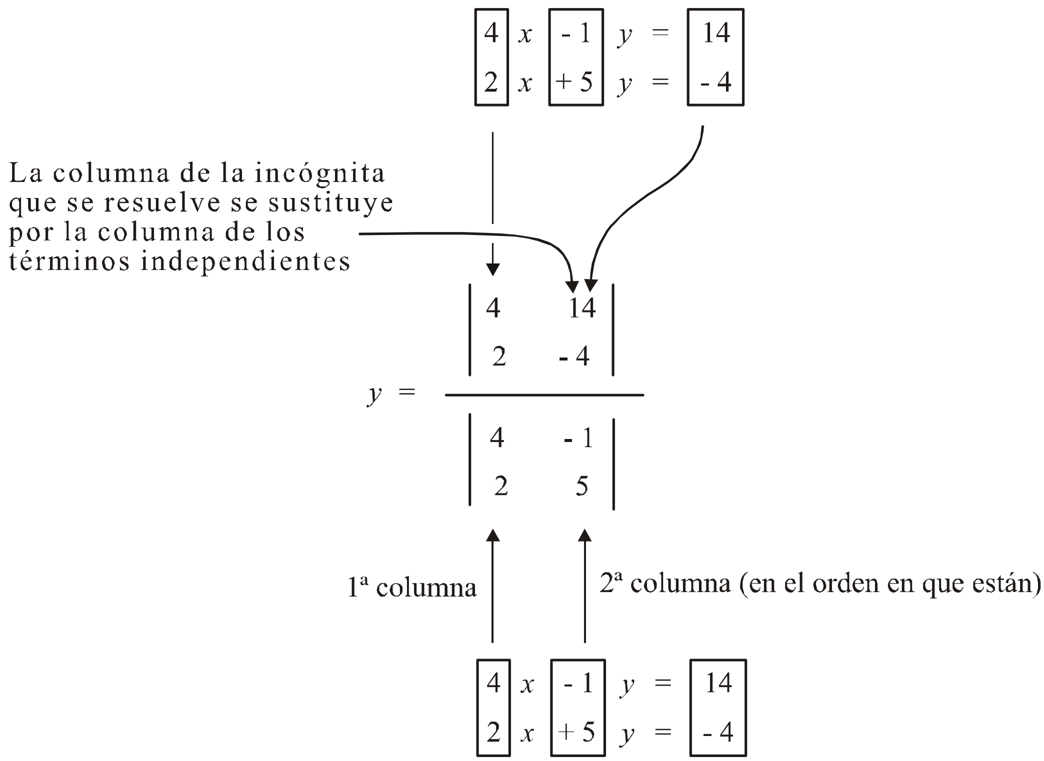
por lo tanto:

$$x = \frac{(14)(5) - (-1)(-4)}{(4)(5) - (-1)(2)}$$

$$x = \frac{70 - 4}{20 + 2} = \frac{66}{22}$$

$$\boxed{x = 3}$$

Para obtener ahora el valor de la incógnita y, conforme a la regla anterior,



por lo tanto:

$$y = \frac{(4)(-4) - (14)(2)}{(4)(5) - (-1)(2)}$$

$$y = \frac{-16 - 28}{20 + 2} = \frac{-44}{22}$$

$$\boxed{y = -2}$$

Ejemplo 2: $9x - 2y = -2$ (1)
$3x + 4y = 11$ (2)

Solución: Estando ordenadas las dos ecuaciones, cuando la regla anterior dice "en el orden en que están", se entiende que la primera columna es la de las equis (9 y 3), la segunda columna es la de las y (- 2 y 4) y la tercer columna es la de los términos independientes (- 2 y 11).

Para obtener el valor de la incógnita *x*, conforme a la regla anterior,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\boxed{\begin{matrix}9\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}x\\x\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-2\\+4\end{matrix}} & \begin{matrix}y\\y\end{matrix} & \begin{matrix}=\\=\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-2\\11\end{matrix}}
\end{array}$$

La columna de la incógnita que se resuelve se sustituye por la columna de los términos independientes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$$

1ª columna

2ª columna (en el orden en que están)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\boxed{\begin{matrix}9\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}x\\x\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-2\\+4\end{matrix}} & \begin{matrix}y\\y\end{matrix} & \begin{matrix}=\\=\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-2\\11\end{matrix}}
\end{array}$$

por lo tanto:

$$x = \frac{(-2)(4) - (-2)(11)}{(9)(4) - (-2)(3)}$$

$$x = \frac{-8 + 22}{36 + 6} = \frac{14}{42}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Para obtener ahora el valor de la incógnita y, una opción es sustituir el valor de *x* obtenido en el paso anterior en alguna de las dos ecuaciones originales, por ejemplo en la (1), de lo cual resulta que:

$$9x - 2y = -2 \qquad (1)$$

$$9\left(\frac{1}{3}\right) - 2y = -2$$

$$\frac{9}{3} - 2y = -2$$

$$
\begin{aligned}
3 - 2y &= -2\\
-2y &= -2 - 3\\
2y &= 2 + 3\\
2y &= 5
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2}}$$

Sin embargo, como práctica, resolviendo la *y* también por determinantes se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\boxed{9}\,x\ \boxed{-2}\,y &= \boxed{-2}\\
\boxed{3}\,x\ \boxed{+4}\,y &= \boxed{11}
\end{aligned}
$$

La columna de la incógnita que se resuelve se sustituye por la columna de los términos independientes

$$
y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}
$$

1ª columna

2ª columna (en el orden en que están)

$$
\begin{aligned}
\boxed{9}\,x\ \boxed{-2}\,y &= \boxed{-2}\\
\boxed{3}\,x\ \boxed{+4}\,y &= \boxed{11}
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$y = \frac{(9)(11) - (-2)(3)}{(9)(4) - (-2)(3)}$$

$$y = \frac{99 + 6}{36 + 6} = \frac{105}{42}$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2}}$$

EJERCICIO 28

Resolver las siguientes ecuaciones simultáneas por determinantes o con la calculadora:

1) $5x = 8 + 2y$; $3x + y = -4$

2) $2x - 9y = 16$; $x = 13 + 7y$

3) $4x = 5y$; $2x + y = 14$

4) $y = 4 - 2x$; $4x = y - 22$

5) $2x + 15y - 76 = 0$; $5y = 9 - 3x$

6) $4x + 8 = -11y$; $6x - 19y = -12$

7) $x - 2y - 18 = 0$; $x = 22 + 3y$

8) $x = -y$; $4x - 3y = 63$

9) $4x - 5y = 0$; $2x = -9y$

10) $3x + 6 = -y$; $7x - 5y = 30$

11) $y = 8 - x$; $x - 32 = y$

12) $10x = 15y$; $7x + 5y = 155$

13) $2x + 3y - 3 = 0$; $4x - 9y = -4$

14) $7x = y + 1$; $8x + y = 2$

15) $7x + 14y = 12$; $21x = 14y$

16) $8y = 6 - 5x$; $2x - 4y = -3$

17) $2x = 4y - 9$; $3x + 5y = 25$

18) $6x + 3y = 15$; $2y = 6 - x$

PROBLEMAS EN CONTEXTO

19) Un terreno rectangular tiene 140 metros de perímetro. Si la base tiene 18 metros más que la altura, calcular sus dimensiones.

20) Un terreno rectangular tiene 280 metros de perímetro. Si la base tiene 3/4 de la longitud de la altura, calcular el área que se obtiene al construir un cuadrado a partir de la diagonal de dicho rectángulo.

21) Un terreno rectangular tiene 240 metros cuadrados de superficie. Si la base tiene 5/12 de la longitud de la altura, calcular el perímetro del cuadrado que se puede formar a partir de la diagonal de dicho terreno.

22) Obtener dos números que sumados den 216, a condición de que el doble del menor sea igual a dos terceras partes del mayor.

23) Para ver una obra de teatro asistieron 1730 personas. El boleto de palcos costó \$200.00 y en Luneta \$135.00. Si se recabó en taquilla la cantidad de \$282 170.00, obtener el número de espectadores que entraron a palcos y el número que asistió en Luneta.

24) Una persona vende un día 250 tortas por lo que obtiene un ingreso neto de \$2 118.00. Si las tortas de jamón las vende a \$8.00 y las de pastel de pollo a \$9.00, calcular cuántas de cada uno vendió.

25) Una persona abre dos cuentas bancarias depositando el mismo capital en ambas. La primera cuenta le rinde el 8% de intereses y la segunda el 5%. Calcular el capital depositado en ambas cuentas sabiendo que el interés del primero sobrepasa al segundo en \$555.00.

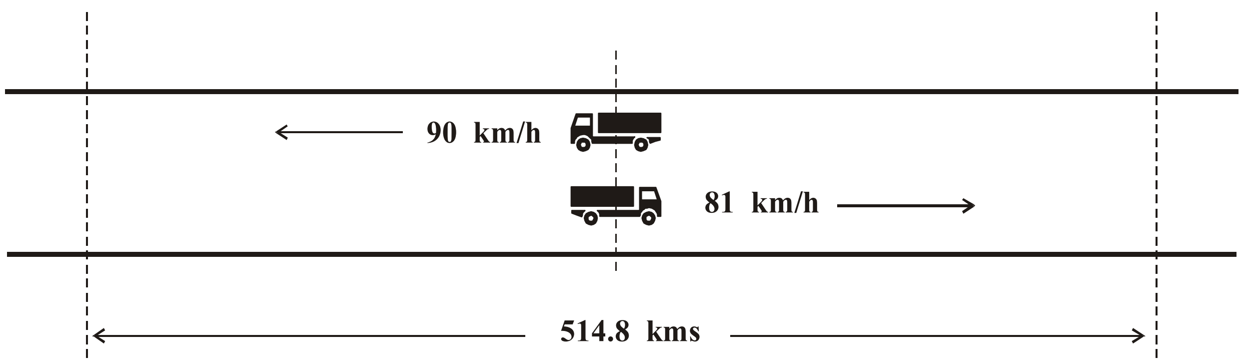
26) Una persona abre dos cuentas bancarias, una de ellas con \$2 500.00 más que la otra. La cuenta con más capital le rinde el 10% de intereses mientras que la otra el 12%. Calcular los capitales de ambas cuentas sabiendo que le rinden igual interés.

27) Si a la edad de Manuel se le suman 3 años se obtiene la tercera parte de la edad actual de su padre. Calcular ambas edades si el duplo de la edad de Manuel es igual a la mitad de la de su padre.

28) Un depósito de 53 000 litros de capacidad es llenado con dos mangueras. La manguera A tiene un flujo de 50 litros por minuto mientras que la manguera B tiene un flujo de 70 litros por minuto. Si el depósito tarda 15 horas en llenarse, calcular el tiempo que cada manguera estuvo trabajando.

29) Un tractor de la fábrica A tiene capacidad para arar 3 metros por minuto, mientras que otro tractor de la fábrica B tiene capacidad para arar 4 metros por minuto. Si entre los dos aran 360 metros, ¿cuánto tiempo ara cada uno de ellos, sabiendo que entre los dos trabajaron un total de 102.5 minutos?.

30) Dos vehículos salen del mismo punto en sentidos contrarios, como lo muestra la figura de abajo. Uno de ellos viaja a una velocidad de 90 km/h y el otro a 81 km/h. Cada uno camina durante cierto tiempo y luego se detienen, de manera que al final quedan separados 514.8 kilómetros. Calcular el tiempo que cada uno de ellos estuvo en movimiento hasta detenerse, sabiendo que la suma de los tiempos de ambos es igual a 6.1 horas.



31) Una prensa mecánica A está diseñada para ejercer una presión de 206 kilogramos por centímetro cuadrado, mientras que otra prensa B está diseñada para ejercer 257 kilogramos por centímetro cuadrado. Al ponerlas a trabajar simultáneamente, pueden ejercer una presión total de 12 607 kilogramos distribuidos en una superficie de 56 centímetros cuadrados. Calcular la superficie que cada prensa cubrió.

32) Una empresa tiene dos coches en los que dos de sus empleados deben hacer ciertos recorridos por la ciudad. El coche A tiene un rendimiento de 7 kilómetros por litro de gasolina en la ciudad (gasta un litro de gasolina por cada 7 kilómetros), mientras que el coche B de 5 kilómetros por litro. Para hacer un recorrido total entre los dos de 714 kilómetros se gastan entre ambos coches 120 litros de gasolina. Calcular cuántos kilómetros recorre cada vehículo.

ECUACIONES SIMULTANEAS CON TRES INCÓGNITAS

Conforme a la 2ª ley de las ecuaciones, cuando se tienen tres incógnitas se requieren tres ecuaciones para que el sistema pueda resolverse. De tal manera que el presente tema se refiere a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas en forma simultánea.

El método de determinantes es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones simultáneas, por lo tanto también lo es para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Solamente hay que añadir la manera de obtener el valor numérico de un determinante de tercer orden.

DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

Como ya se mencionó en la página 124, un determinante de tercer orden es el que tiene tres filas y tres columnas. Para calcular el valor numérico de un determinante de tercer orden existen varias formas.

La primera, llamada *"desarrollo de un determinante por sus menores"* consiste en lo siguiente:

Para calcular un determinante de tercer orden por el método de "desarrollo por menores", se efectúa la suma de lo que resulte del siguiente desarrollo:

a) Se toma el primer elemento de la primera fila, considerado positivo, y se multiplica por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese primer elemento;

b) Se toma el segundo elemento de la primera fila, considerado negativo, y se multiplica por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese segundo elemento;

c) Se toma el tercer elemento de la primera fila, considerado positivo, y se multiplica por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese tercer elemento.

Para explicar la razón de que este procedimiento tenga tal nombre implica un estudio completo de determinantes, en donde se incluyen los de cuarto, quinto, sexto, etc., orden, y en este curso no está contemplado dicho estudio. Por lo tanto, se deja sin mayor explicación ese nombre.

Ejemplo 1: Obtener el valor numérico del siguiente determinante, desarrollándolo por sus menores:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Solución: Los elementos de la primera fila son el 3, el 5 y el 6. Así que conforme a la regla del recuadro anterior se tiene lo siguiente:

a) Tomando el primer elemento de la primera fila, el 3, considerado positivo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad +3\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

b) Tomando el segundo elemento de la primera fila, el 5, considerado negativo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese 5:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad -5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$$

c) Tomando el tercer elemento de la primera fila, el 6, considerado positivo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese 6:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad +6\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$$

De tal manera que el determinante original es igual a:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} = +\,3\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(8)(-3) - (-2)(4)] - 5[(1)(-3) - (-2)(9)] + 6[(1)(4) - (8)(9)]$$

$$= 3[-24 + 8] - 5[-3 + 18] + 6[4 - 72]$$

$$\boxed{= -579}$$

Ejemplo 2: Obtener el valor numérico del siguiente determinante, desarrollándolo por sus menores:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución: Los elementos de la primera fila son el - 4, el - 2 y el 6. Así que conforme a la regla del recuadro anterior se tiene lo siguiente:

a) Tomando el primer elemento de la primera fila, el - 4, considerado positivo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese - 4:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad +(-4)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$$

b) Tomando el segundo elemento de la primera fila, el - 2, considerado negativo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese - 2:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad -(-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

c) Tomando el tercer elemento de la primera fila, el 6, considerado positivo, y multiplicándolo por el determinante de segundo orden que resulta al quitar la fila y la columna en donde se encuentra ese 6:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{se obtiene} \quad +6\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

De tal manera que el determinante original es igual a:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$= -4[\,(-3)(8) - (2)(-5)\,] + 2[\,(-1)(8) - (2)(5)\,] + 6[\,(-1)(-5) - (-3)(5)\,]$
$= -4[\,-24 + 10\,] + 2[\,-8 - 10\,] + 6[\,5 + 15\,]$
$\boxed{=140}$

MÉTODO "EN CRUZ"

En la página 131 se dijo que existen varias formas para calcular el valor numérico de un determinante de tercer orden. Otro de estos métodos es el de multiplicaciones en cruz, semejante al procedimiento de los determinantes de segundo orden.

Se realizan tres multiplicaciones en el sentido ↘ que se consideran positivas, y tres en el sentido ↙ que se consideran negativas. Cada multiplicación debe estar compuesta por tres elementos (números) del determinante, de la siguiente manera:

1) por los tres elementos de la diagonal (positiva y negativa).

   En la figura 9.1, la diagonal positiva está formada por los elementos {*a, e, i*}, mientras que la diagonal negativa está formada por los elementos {*c, e, g*}.

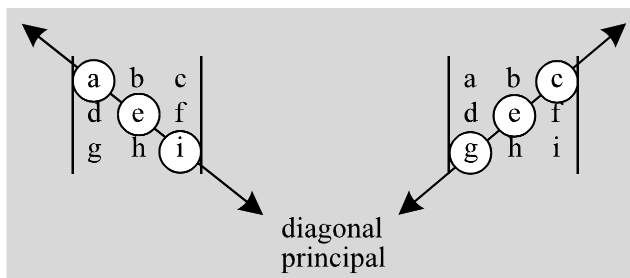


figura 9.1

2) por los dos elementos de la subdiagonal (sub = por debajo), completándose con el elemento situado en el vértice opuesto.

   En la figura 9.2, los elementos de la subdiagonal positiva (*sub* = abajo, es decir, los elementos que están abajo de la diagonal) son *d* y *h*, y el elemento situado en el vértice opuesto es *c*.

   Por otra parte, los elementos de la subdiagonal negativa (*sub* = abajo, es decir, los elementos que están abajo de la diagonal) son *f* y *h*, y el elemento situado en el vértice opuesto es *a*.

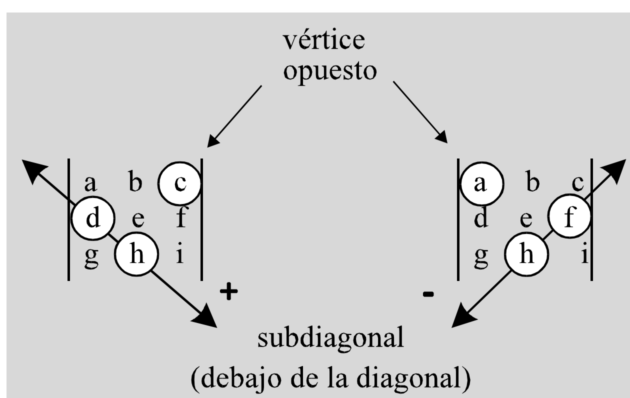


figura 9.2

3) por los dos elementos de la supradiagonal (supra = por encima), completándose con el elemento situado en el vértice opuesto.

   En la figura 9.3, los elementos de la supradiagonal positiva (*supra* = encima, es decir, los elementos que están por encima de la diagonal) son *b* y *f*, y el elemento situado en el vértice opuesto es *g*.

   Por otra parte, los elementos de la supradiagonal negativa (*supra* = encima, es decir, los elementos que están por encima de la diagonal) son *b* y *d*, y el elemento situado en el vértice opuesto es *i*.

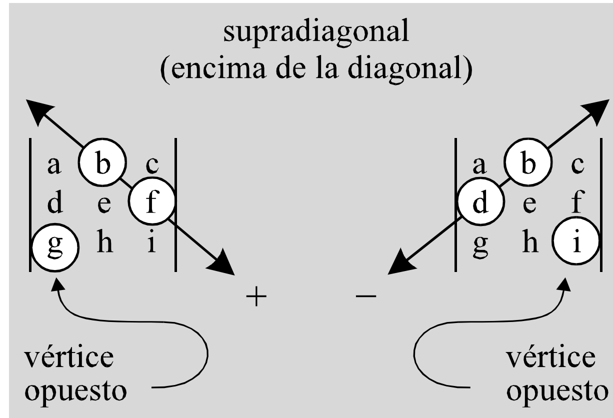
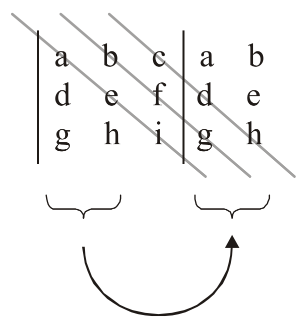


figura 9.3

Una manera de facilitar estas tres multiplicaciones en cada sentido, es repetir las dos primeras columnas del determinante a la derecha del mismo, con lo que se forman una especie de tres diagonales.

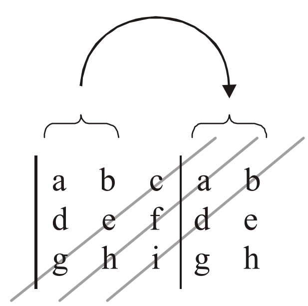
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinante original



positivas:
+ aei + bfg + cdh

las dos primeras columnas se reproducen



negativas:
- ceg - afh - bdi

de tal manera que el valor del determinante es

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Debe tenerse mucho cuidado, cuando se calcule el valor numérico de esta manera, de escribir correctamente las dos líneas verticales que simbolizan un determinante, ya que hay que recordar que éste debe tener igual número de filas que de columnas. Un error de escritura muy frecuente en los estudiantes es escribir de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

escritura correcta:
hay 3 filas y 3 columnas entre el símbolo de determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

escritura incorrecta:
hay 3 filas y **¡ 5 columnas!** entre el símbolo de determinante.

Ejemplo 3: Obtener el valor numérico del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Solución:
a) Los elementos de la diagonal positiva (↘) son el 3, el 8 y el - 3.
b) Los elementos de la supradiagonal positiva con el elemento del vértice opuesto son el 5, el - 2 y el 9.
c) Los elementos de la subdiagonal positiva con el elemento del vértice opuesto son el 1, el 4 y el 6.
d) Los elementos de la diagonal negativa (↙) son el 6, el 8 y el 9.
e) Los elementos de la supradiagonal negativa con el elemento del vértice opuesto son el 5, el 1 y el - 3.
f) Los elementos de la subdiagonal negativa con el elemento del vértice opuesto son el - 2, el 4 y el 3.

De manera que $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= \overbrace{\underbrace{(3)(8)(-3)}_{\text{diagonal}} + \underbrace{(5)(-2)(9)}_{\text{supra-diagonal}} + \underbrace{(1)(4)(6)}_{\text{sub-diagonal}}}^{\text{positivos}} - \overbrace{\underbrace{(6)(8)(9)}_{\text{diagonal}} - \underbrace{(5)(1)(-3)}_{\text{supra-diagonal}} - \underbrace{(-2)(4)(3)}_{\text{sub-diagonal}}}^{\text{negativos}}$$

$$= -72 - 90 - 24 - 432 + 15 + 24 \quad \boxed{= -579}$$

Compárese este resultado con el obtenido en el ejemplo 1, de la página 134.

Ejemplo 4: Obtener el valor numérico del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución: Repitiendo las dos primeras columnas al final del determinante:

$$\left| \begin{array}{ccc} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{array} \right| \begin{array}{cc} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 5 & -5 \end{array}$$

tres multiplicaciones en el sentido positivo

$$\left| \begin{array}{ccc} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{array} \right| \begin{array}{cc} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 5 & -5 \end{array}$$

tres multiplicaciones en el sentido negativo

De manera que $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} =$

$$= \underbrace{(-4)(-3)(8) + (-2)(2)(5) + (6)(-1)(-5)}_{\text{positivos}} - \underbrace{(6)(-3)(5) - (-4)(2)(-5) - (-2)(-1)(8)}_{\text{negativos}}$$

$$= 96 - 20 + 30 + 90 - 40 - 16 \boxed{= 140}$$

Compárese este resultado con el obtenido en el ejemplo 2, de la página 135.

EJERCICIO 29

Resolver los siguientes determinantes por cualquiera de los métodos explicados:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -7 & -7 & 2 \\ -5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} -3 & -10 & 11 \\ 7 & 7 & 1 \\ -5 & 9 & -3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \\ -7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 10 \\ 2 & 2 & -6 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 21 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

ECUACIONES SIMULTÁNEAS CON TRES INCÓGNITAS

Para resolver un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas por determinantes, o utilizando determinantes, se emplea la misma regla que para dos ecuaciones con dos incógnitas (ver página 126).

Esto significa que, en primer lugar, deben estar ordenadas las ecuaciones en la forma

$$ax + by + cz = d \qquad (1)$$
$$ex + fy + gz = h \qquad (2)$$
$$ix + jy + kz = m \qquad (3)$$

en donde a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k y m representan números. Que estén ordenadas las ecuaciones significa que por columnas deben estar las mismas incógnitas y a la derecha del signo "igual" deben estar los términos independientes, es decir, los números "solitos" o los que no tienen incógnita.

La regla ya conocida (ver página 126) es:

Para calcular el valor de una incógnita cualquiera:

* ***El denominador es el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas en el orden en que están.***

* ***El numerador es el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas en el orden en que están, en el que se sustituye la columna de los coeficientes de la incógnita que se resuelve por la columna de los términos independientes.***

Ejemplo 1:

$$2x + 4y - 3z = 8 \qquad (1)$$
$$5x - 2y + 2z = 14 \qquad (2)$$
$$4x - 10y + 4z = 7 \qquad (3)$$

Solución: Las tres ecuaciones están ordenadas, ya que en la primera columna se tiene a la incógnita x, en la segunda columna a la incógnita y; en la tercera columna a la incógnita z y en la cuarta columna (después del signo =) a los términos independientes.

Para la construcción de los determinantes del numerador y del denominador, observar que:

* la primera columna está formada por los coeficientes {2, 5, 4} que corresponden a los coeficientes de las x;

* la segunda columna está formada por los coeficientes {4, - 2, - 10} que corresponden a los coeficientes de las y;

* la tercera columna está formada por los coeficientes {- 3, 2, 4} que corresponden a los coeficientes de las z;

* y la cuarta columna por los términos independientes, o sea por los que están a la derecha del signo "igual", es decir por { 8, 14, 7 }.

Así que para obtener el valor de la incógnita x, conforme a la regla general, se tiene que:

$$\boxed{\begin{matrix}2\\5\\4\end{matrix}}\begin{matrix}x\\x\\x\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}+4\\-2\\-10\end{matrix}}\begin{matrix}y\\y\\y\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}-3\\+2\\+4\end{matrix}}\begin{matrix}z\\z\\z\end{matrix}\ \begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}8\\14\\7\end{matrix}}$$

La columna de la incógnita que se resuelve (la de las equis) se sustituye por la columna de los términos independientes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix}8 & +4 & -3\\ 14 & -2 & +2\\ 7 & -10 & +4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & +4 & -3\\ 5 & -2 & +2\\ 4 & -10 & +4\end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}2\\5\\4\end{matrix}}\begin{matrix}x\\x\\x\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}+4\\-2\\-10\end{matrix}}\begin{matrix}y\\y\\y\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}-3\\+2\\+4\end{matrix}}\begin{matrix}z\\z\\z\end{matrix}\ \begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}8\\14\\7\end{matrix}}$$

De donde:

$$x = \frac{(8)(-2)(4) + (4)(2)(7) + (14)(10)(-3) - (-3)(-2)(7) - (4)(14)(4) - (2)(-10)(8)}{(2)(-2)(4) + (4)(2)(4) + (5)(-10)(-3) - (-3)(-2)(4) - (4)(5)(4) - (2)(-10)(2)}$$

$$x = \frac{-64 + 56 + 420 - 42 + 160 - 224}{-16 + 32 + 150 - 24 + 40 - 80}$$

$$x = \frac{306}{102}$$

$$\boxed{x = 3}$$

Para obtener el valor de la incógnita y, conforme a la regla general, se tiene que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 & x & +4 & y & -3 & z & = & 8 \\ 5 & x & -2 & y & +2 & z & = & 14 \\ 4 & x & -10 & y & +4 & z & = & 7 \end{array}$$

La columna de la incógnita que se resuelve (la de las "y^{es}") se sustituye por la columna de los términos independientes.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 5 & 14 & +2 \\ 4 & 7 & +4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & +4 & -3 \\ 5 & -2 & +2 \\ 4 & -10 & +4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 & x & +4 & y & -3 & z & = & 8 \\ 5 & x & -2 & y & +2 & z & = & 14 \\ 4 & x & -10 & y & +4 & z & = & 7 \end{array}$$

Obsérvese que el determinante del denominador no varía, es decir, de acuerdo con la regla es el mismo para todas las incógnitas, por lo tanto basta copiarlo del obtenido en la incógnita calculada anterior. Por esta razón, en el denominador aparece directamente el 102. De manera que se obtiene que:

$$y = \frac{(2)(14)(4) + (8)(2)(4) + (5)(7)(-3) - (-3)(14)(4) - (8)(5)(4) - (2)(7)(2)}{102}$$

$$y = \frac{112 + 64 - 105 + 168 - 160 - 28}{102}$$

$$y = \frac{51}{102}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

Para obtener el valor de la incógnita z, conforme a la regla general, se tiene que:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{2} x & & \boxed{+4} y & & \boxed{-3} z & = & \boxed{8} \\ 5x & & -2y & & +2z & = & 14 \\ 4x & & -10y & & +4z & = & 7 \end{array}$$

La columna de la incógnita que se resuelve (la de las "zetas") se sustituye por la columna de los términos independientes.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & +4 & 8 \\ 5 & -2 & 14 \\ 4 & -10 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & +4 & -3 \\ 5 & -2 & +2 \\ 4 & -10 & +4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & +4y & & -3z & = & 8 \\ 5x & & -2y & & +2z & = & 14 \\ 4x & & -10y & & +4z & = & 7 \end{array}$$

Obsérvese que el determinante del denominador no varía, es decir, de acuerdo con la regla es el mismo para todas las incógnitas, por lo tanto basta copiarlo del obtenido en la incógnita calculada anterior. Por esta razón, en el denominador aparece directamente el 102. De manera que se obtiene que:

$$z = \frac{(2)(-2)(7) + (4)(14)(4) + (5)(-10)(8) - (8)(-2)(4) - (4)(5)(7) - (14)(-10)(2)}{102}$$

$$z = \frac{-28 + 224 - 400 + 64 - 140 + 280}{102}$$

$$z = \frac{0}{102}$$

$$\boxed{z = 0}$$

CALCULADORA

Para resolver ecuaciones simultáneas con tres incógnitas con la calculadora **Casio** *fx-95MS*, el sistema de ecuaciones tiene que estar ordenado de la siguiente manera:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \qquad (3)$$

en donde debe entenderse que el coeficiente de la equis de la primera ecuación está simbolizado por a_1; el coeficiente de la y de la primera ecuación está simbolizado por b_1; el coeficiente de la z de la primera ecuación está simbolizado por c_1 y el término independiente de la primera ecuación está simbolizado por $d_{1.}$

Algo similar ocurre en la simbología de las ecuaciones (2) y (3).

Una vez ordenado así, debe teclearse lo siguiente:

$\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}\ \boxed{3}$

y a continuación ir ingresando los valores de los coeficientes que va solicitando la calculadora en la pantalla. Recordar que con la tecla $\boxed{=}$ van quedando registrados cada uno de dichos valores. Al ingresar el último valor, o sea d_3, aparecen los valores de cada una de las incógnitas.

EJERCICIO 30

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por determinantes o con la calculadora:

1) $4x + 2y - 3z = 6$
$3x + 4y + z = 5$
$3x - 2y - 5z = 2$

2) $x - 2y - z = 0$
$2x - y + z = 0$
$3x + y + 2z = -2$

3) $x + 2y + z = 4$
$2x - 5y + 3z = 0$
$2x - 5y - 4z = -7$

4) $3x + 9y - 2z = 4$
$6x - 7y + 4z = -4$
$9x - 5y - 6z = 12$

5) $x + y - z = 1$
$2x + 2y + 5z = 2$
$5x - 2y + 3z = 3$

6) $4x - y + z = 39$
$5x + 2y - 6z = 5$
$5x - 2y + 4z = 61$

7) $3x + 9y - 2z = 4$
$6x - 7y + 4z = -4$
$9x - 5y - 6z = 12$

8) $2x + 2y - 3z = 5$
$2x - 2y + 3z = 15$
$2x - 2y - 3z = 33$

9) $3x + 3y + z = 11$
$2x + 2y - 9z = -99$
$4x + 5y + z = 15$

10) $3x + 2y - 14z = 3$
$-x - 9y + 13z = -1$
$x + y + z = 1$

11) $8x + 10y - 8z = 14$
$6x + 5y + 2z = 13$
$3x - 5y + 11z = 0$

12) $7x + 5y - 2z = 13$
$7x - 9y - 9z = 13$
$14x + 2y + 3z = 26$

13) Tres hombres A, B y C trabajaron con salarios diferentes por hora. Cuando A trabajó 3 horas, B trabajó 4 horas y C 6 horas, recibieron en total $48.00. En otra ocasión, por 4 horas de trabajo de A y 3 de C cobraron en total $23.00. Finalmente, cuando A laboró 2 horas, B 3 horas y C 5 horas les pagaron en total $38.00. Calcular lo que cobró cada uno por hora trabajada.

14) Un número de tres cifras puede escribirse como 100c + 10d + u (c=centenas; d=decenas; u=unidades). La suma de los tres dígitos es 14. El número que resulta de al invertir los dígitos es 396 mayor que el número original. La suma suma de las centenas y las decenas es igual al dígito de las unidades. Hallar dicho número.

15) Tres trabajadores A, B y C pueden hacer un trabajo en 16 horas cuando se reparten el quehacer de manera equitativa y lo hacen juntos. En cambio, si B no hace nada y A trabaja durante 9 horas y C 5 horas, el trabajo queda terminado. Lo mismo pasa cuando A sin hacer nada, B labora por 8 horas y C durante 10 horas. ¿Cuánto tardará cada uno para hacer el trabajo él solo?.

16) Una caja registradora tiene monedas de $1.00, de $5.00 y de $10.00, con un valor total de $175.00. En total hay 35 monedas y además son 7 monedas más de a peso que de a cinco pesos. ¿Cuántas monedas de cada denominación hay?.

17) Un comerciante tiene invertidos $25 000 000.00 en tres negocios. Uno de ellos le produce el 3%, el segundo el 4% y el otro el 5%. Su ingreso total es de $1 030 000.00 por año. Si el ingreso del tercer negocio excede a la suma de los otros dos en $70 000.00, ¿cuánto invirtió en cada uno de ellos?.

18) En un estadio se vendieron los boletos de sol a $100.00, los de sombra a $160.00 y los de palcos a $240.00.En total se vendieron 13 200 boletos que dejó una derrama económica de $ 2 116 000.00. Si los boletos vendidos de sol más los de palcos fueron el doble de los vendidos de sombra, ¿cuántos boletos de cada localidad se vendieron?.

19) Buscar tres números que sumados den 1125, tales que el triple del primero sea igual al segundo y el quíntuplo del primero sea igual al tercero.